This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 2288.99

Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,

AND HIS WIDOW,

ELIZA FARRAR,

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."

SCIENCE CENTER LIBRARY

Ueber Kreisteilungsgleichungen vom Primzahlgrad

$$p = p_1^{\pi_1} \cdot p_2^{\pi_2} \ldots p_\mu^{\pi_\mu} + 1 \,.\, (\mu > 1).$$

Inaugural-Dissertation

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Greifswald

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt

und nebst den beigefügten Thesen

am

Donnerstag, den 21. December 1899,
vormittags 11 Uhr

öffentlich verteidigt von

Paul Heidke
aus Gollnow.

Opponenten:
Herr Drd. phil. Wolf.
Herr cand. phys. Löwenherz.
Herr cand. math. Jeske.

Greifswald.
Druck von F. W. Kunike.
1899.

Math 2288.99

HARVARD COLLEGE
JUL 28 1900
LIBRARY.

Farrar fund

Meinem verehrten Lehrer

Herrn Direktor Dr. Lehmann

in Dankbarkeit

gewidmet.

Einleitung.

Die Gausssche Methode, Kreisteilungsgleichungen vom Primzahlgrade p zu lösen, besteht im Princip darin, eine Reihe von Gleichungen hinter einander zu lösen, von denen nur die erste rationale Coëfficienten besitzt. Enthält nun $p-1$ mehrere, etwa μ von einander verschiedene Primfaktoren, so lässt diese in den Werken von „P. Bachmann: Die Lehre von der Kreisteilungsgleichung, Leipzig 1872" und „H. Weber: Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1895" dargestellte Methode noch eine weitere Vereinfachung zu. Es kann dann nämlich nach den Principien der Galoisschen Theorie die Lösung der vorgelegten Kreisteilungsgleichung auf die Lösung von μ Gleichungen mit ganzen Coëfficienten zurückgeführt werden.

Ist $p_k^{\pi_k}$ die höchste Potenz des Primfaktors p_k, durch die $p-1$ teilbar ist, so ist $p_k^{\pi_k}$ der Grad einer der erwähnten bereits von Gauss aufgestellten Teilgleichungen. Die Lösung dieser Gleichung erfolgt nach Gauss dadurch, dass man π_k Gleichungen vom Grade p_k, von denen nur die erste rationale Coëfficienten besitzt, hinter einander auflöst. Sind alle μ Gleichungen auf diese Art gelöst, so lassen sich die Wurzeln der vorgelegten Gleichung rational ermitteln. Dieses principiell vorzuziehende Verfahren ist auf Grund eines in § 3 aufzustellenden Satzes auch für die rechnerische Durchführung einfacher als das ursprüngliche Gausssche; wir erläutern es durch seine Anwendung auf die Fälle $p = 7, 11, 13, 19, 29, 31$. Für den in dieser Reihe fehlende Wert $p = 23$ ist die Rechnung nicht völlig durchgeführt worden. Der Grund hierfür wird bei diesem Beispiel selbst angegeben werden.

§ 1.

Aufstellung von $(p-1)$ linearen Gleichungen mit den $(p-1)$ primitiven $p$ten Einheitswurzeln als Unbekannten.

Ist p eine Primzahl, so existieren $(p-1)$ primitive $p$te Einheitswurzeln. Es sei nun

$$p-1 = p_1^{\pi_1} \cdot p_2^{\pi_2} \cdot \ldots \cdot p_\mu^{\pi_\mu},$$

wofern $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ die von einander verschiedenen Primteiler von $(p-1)$ bedeuten, und es werde vorausgesetzt $\mu > 1$. Man bildet nun zunächst die $\frac{p-1}{p_1^{\pi_1}}, \frac{p-1}{p_2^{\pi_2}}, \ldots \frac{p-1}{p_\mu^{\pi_\mu}}$ gliedrigen Perioden und stellt ihre irreduziblen ganzzahligen Gleichungen auf, deren Wurzeln diese Perioden sind. Diese Gleichungen sind cyklisch und vom Grade $p_1^{\pi_1}, p_2^{\pi_2} \ldots p_\mu^{\pi_\mu}$. Ihre Auflösung erfolgt in bekannter Weise.[1])

Die Produkte der Gaussschen Perioden sind lineare homogene Funktionen der primitiven $p$ten Einheitswurzeln ε mit ganzen Zahlenkoëfficienten. Bildet man nun die $p-1$ Produkte, deren Faktoren je eine $\frac{p-1}{p_1^{\pi_1}}$ gliedrige Periode, eine $\frac{p-1}{p_2^{\pi_2}}$ gliedrige Periode etc. sind, so erhält man $p-1$ lineare Gleichungen mit den $p-1$ primitiven $p$ten Einheitswurzeln als Unbekannten, und zwar kann man alle diese Gleichungen ohne Weiteres bilden, wenn man nur eine einzige von ihnen kennt. Sie entstehen nämlich alle aus dieser einen, wenn man die Wurzeln ε cyklisch vertauscht und gleichzeitig die entsprechenden Vertauschungen mit den Perioden vornimmt.

Damit ist die Aufgabe der Bestimmung der $p$ten Einheitswurzeln auf die Lösung von $p-1$ linearen Gleichungen zurückgeführt, vorausgesetzt, dass diese von einander unabhängig sind. Dies werden wir noch nachzuweisen haben.

§ 2.

$D \neq 0$.

Die Derminante D des in § 1. erwähnten Gleichungssystems ist eine sogenannte cyklische Determinante. Damit die Berechnung der

---

1) Weber: Lehrbuch der Algebra I. § 165.

ε aus diesen Gleichungen möglich sei, muss $D \neq 0$ sein. Wäre $D = 0$, so müsste zwischen den Horizontalreihen von D und also auch zwischen den Produkten der Gauss'schen Perioden eine rationale lineare Beziehung bestehen. Rational muss diese sein, weil die Elemente von D rationale Zahlen sind. Wir zeigen nun, dass eine solche lineare Gleichung nicht existieren kann.

Seien $u_0, u_1, \ldots u_{e-1}$ die f-gliedrigen Perioden ($p-1 = e.f$). Diese lassen sich alle linear durch die Potenzen einer von ihnen, z. B. $u_0^0, u_0^1, \ldots, u_0^{e-1}$ ausdrücken und genügen einer irreduziblen cyklischen Gleichung $e$ten Grades. Umgekehrt lassen sich die u_0^k wieder linear darstellen durch $u_0, u_1, \ldots u_{e-1}$. Besteht nun in irgend einem Bereiche $\Omega(\vartheta)$ eine lineare Gleichung

$$\sum_0^{e-1} \alpha_i(\vartheta) u_i = 0,$$

so folgt daraus eine andere der Form

$$\sum_0^{e-1} \beta_k(\vartheta) u^k = 0,$$

d. h. die Periodengleichung $e$ten Grades wird reduzibel durch Adjunktion der Grösse ϑ. Demnach müssen die Körper $\Omega(u_0)$ und $\Omega(\vartheta)$ einen Unterkörper (Teiler nach Weber) gemein haben.

Ist nun

$$p-1 = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_\mu^{\pi_\mu}$$

und sind $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots u^{(\mu)}$ zu den einzelnen Primzahlpotenzen $p_1^{\pi_1}, p_2^{\pi_2}, \ldots p_\mu^{\pi_\mu}$ gehörige Perioden, so wird nach der Galois-schen Theorie die Auflösung der Gleichung $\sum_0^{p-1} x^i = 0$ durch Adjunktion der Irrationalitäten $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots u^{(\mu)}$ bewirkt, und man kann sie auch nicht mit geringeren Hilfsmitteln lösen; anders ausgedrückt, die Körper $\Omega(u^{(1)}), \Omega(u^{(2)}), \ldots \Omega(u^{(\mu)})$ haben keinen Teilkörper gemein [2]). Also besteht, wenn

$$\Omega(\vartheta) = \Omega(u^{(p)}, u^{(2)}, \ldots u^{(\mu)})$$

gesetzt wird, in diesem Bereich auch keine Gleichung der Form

$$\Sigma \alpha_k u_{(k)}^{(1)} = 0$$

d. h. die Produkte von je μ Perioden

2) Weber: Lehrbuch der Algebra I. § 156.

$$u^{(1)} \cdot (u^{(2)} \cdot u^{(3)} \cdot \ldots u^{(\mu)})$$

sind im natürlichen Rationalitätsbereich linear unabhängig. Also ist in der That

$$D \neq 0.$$

Der Kern des Beweises ist also kurz folgender: Bestünde eine rationale lineare Relation zwischen den Periodenprodukten, so würde die Kreistheilungsgleichung reduzibel werden, die ε würden Wurzeln einer Gleichung von niederem als dem $(p-1)$ten Grade sein, was unmöglich ist [3])

Wir werden nun die geschilderte Rechnung in den Fällen $p = 7$, 11, 13, 19, 29, 31 wirklich durchführen.

§ 3.

Berechnung von D und den $(p-2)$ reihigen Unterdeterminanten von D.

Es fragt sich nun, wie die Ausdrücke der ε aus den aufgestellten Gleichungen berechnet werden können. Sei eine der Gleichungen

$$u_{1,0}\, u_{2,0} \cdot \ldots u_{\mu,0} = a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + \ldots + a_{p-2} \varepsilon_{p-2},$$

so ergiebt sich

$$D = \prod_{0}^{p-2} (a_0 + a_1 \alpha^i + a_2 \alpha^{2i} + \ldots + a_{p-2} \alpha^{(p-2)i}) \text{ [4])},$$

worin α eine primitive $(p-1)$te Einheitswurzel bedeutet.

Die zu a_k gehörige Unterdeterminante ist, wenn wir

$\varphi_{(i)} = a_0 + a_1 \alpha^i + a_2 \alpha^{2i} + \ldots + a_{p-2} \alpha^{(p-2)i}$ setzen,

$$A_k = \frac{1}{p-1} \frac{\partial D}{\partial a_k} \text{ [5])}$$

$$= \frac{D}{p-1} \left[\frac{1}{\varphi_{(0)}} + \frac{\alpha^k}{\varphi_{(1)}} + \frac{\alpha^{2k}}{\varphi_{(2)}} + \ldots + \frac{\alpha^{(p-2)k}}{\varphi_{(p-2)}} \right].$$

---

3) Weber: Lehrbuch der Algebra. I. Aufl. Band I. § 134.

4) Zehfuss: Anwendungen einer besonderen Determinante. Zeitschrift für Mathematik etc. Xol. VII. p. 439 (1872).

5) Stern: Einige Bemerkungen über eine Determinante. Crelle's Journal Vol. 73. p. 374.

In sämtlichen von mir behandelten besonderen Fällen trägt sehr zur Erleichterung der Rechnung bei, dass das Produkt von $\varphi_{(i)}$ und $\varphi_{(p-1-i)}$ eine Potenz von p ist, wounter auch $p^0 = 1$ einbegriffen ist. Leider ist es mir nicht möglich gewesen, nachzuweisen, ob ein derartiger Satz allgemein gilt. Wir stellen die hierauf bezüglichen Formeln zunächst zusammen.

$$p = 7.$$

$$\varphi_{(i)} = \alpha^i - \alpha^{3i} - \alpha^{4i}.$$

$$\varphi_{(1)} \cdot \varphi_{(5)} = 7. \qquad \varphi_{(2)} \cdot \varphi_{(4)} = 1.$$

$$p = 11.$$

$$\varphi_{(i)} = -1 + \alpha^i + \alpha^{2i} - \alpha^{6i} - \alpha^{7i}.$$

$$\varphi_{(1)} \cdot \varphi_{(9)} = 11, \qquad \varphi_{(2)} \cdot \varphi_{(8)} = 1,$$

$$\varphi_{(3)} \cdot \varphi_{(7)} = 11. \qquad \varphi_{(4)} \cdot \varphi_{(6)} = 1.$$

$$p = 13.$$

$$\varphi_{(i)} = \alpha^i + \alpha^{3i} + \alpha_{2i} - \alpha^{4i} - \alpha^{6i} - \alpha^{9i} - \alpha^{11i}.$$

$$\begin{cases} \varphi_{(1)} \cdot \varphi_{(12)} = 13, & \varphi_{(4)} \cdot \varphi_{(8)} = 1, \\ \varphi_{(5)} \cdot \varphi_{(7)} = 13. & \varphi_{(3)} \cdot \varphi_{(9)} = 1. \end{cases}$$

$$\varphi_{(2)} \cdot \varphi_{(10)} = 13.$$

$$p = 19.$$

$$\varphi_{(i)} = -1 + \alpha^{3i} - \alpha^{5i} - \alpha^{7i} - \alpha^{8i} - \alpha^{12i} + \alpha^{14i} + \alpha^{16i} + \alpha^{17i}.$$

$$\begin{cases} \varphi_{(1)} \cdot \varphi_{(17)} = 19, & \varphi_{(2)} \cdot \varphi_{(16)} = 1, \\ \varphi_{(5)} \cdot \varphi_{(13)} = 19, & \varphi_{(4)} \cdot \varphi_{(14)} = 1, \\ \varphi_{(7)} \cdot \varphi_{(11)} = 19. & \varphi_{(6)} \cdot \varphi_{(12)} = 1, \\ \varphi_{(3)} \cdot \varphi_{(15)} = 19. & \varphi_{(8)} \cdot \varphi_{(10)} = 1, \end{cases}$$

$$p = 23.$$

$$\varphi_{(i)} = \alpha^i + \alpha^{2i} - \alpha^{5i} + \alpha^{7i} - \alpha^{8i} - \alpha^{11i} - \alpha^{12i} - \alpha^{13i} + \alpha^{16i} - \alpha^{18i} + \alpha^{19i}.$$

$$\varphi_{(1)} \cdot \varphi_{(21)} = 23, \qquad \varphi_{(2)} \cdot \varphi_{(20)} = 1,$$

$$\varphi_{(3)} \cdot \varphi_{(19)} = 23, \qquad \varphi_{(4)} \cdot \varphi_{(18)} = 1,$$

$$\varphi_{(5)} \cdot \varphi_{(17)} = 23, \qquad \varphi_{(6)} \cdot \varphi_{(16)} = 1,$$

$$\varphi_{(7)} \cdot \varphi_{(15)} = 23, \qquad \varphi_{(8)} \cdot \varphi_{(14)} = 1,$$

$$\varphi_{(9)} \cdot \varphi_{(13)} = 23. \qquad \varphi_{(10)} \cdot \varphi)12) = 1.$$

$$p = 29.$$

$$\varphi_{(i)} = -1 + 2\alpha^{3i} - \alpha^{4i} + \alpha^{6i} + 2\alpha^{8i} + \alpha^{9i} - \alpha^{10i} - \alpha^{13i} - \alpha^{15i} + \alpha^{18i} - \alpha^{22i} - \alpha^{23i} - \alpha^{24i}.$$

$$\begin{cases} \varphi(1)\cdot\varphi(27) = 29, \\ \varphi(3)\cdot\varphi(25) = 29, \\ \varphi(5)\cdot\varphi(23) = 29, \\ \varphi(9)\cdot\varphi(19) = 29, \\ \varphi(11)\cdot\varphi(17) = 29, \\ \varphi(13)\cdot\varphi(15) = 29. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(4)\ \varphi(24) = 1, \\ \varphi(8)\ \varphi(20) = 1, \\ \varphi(12)\ \varphi(16) = 1, \\ \varphi(7)\ \varphi(21) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(2)\ \ \varphi(26) = 29, \\ \varphi(6)\ \ \varphi(22) = 29, \\ \varphi(10)\ \varphi(18) = 29. \end{cases}$$

$$p = 31.$$

$$\varphi(i) = -1 - \alpha^{i}_{0} + \alpha^{2i}_{1} - 4\alpha^{3i} - 2\alpha^{5i} + \alpha^{7i} - \alpha^{8i} + \alpha^{9i}$$
$$- 2\alpha^{11i} - \alpha^{12i} - 5\alpha^{13i} + \alpha^{14i} + \alpha^{15i} - \alpha^{16i} - 2\alpha^{17i} + 4\alpha^{18i} + 2\alpha^{19i} + 2\alpha^{20i}$$
$$+ \alpha^{21i} - \alpha^{22i} + 9\alpha^{23i} - 2\alpha^{24i} + \alpha^{25i} + 3\alpha^{26i} + 2\alpha^{27i} + 4\alpha^{28i} - 2\alpha^{29i}$$

$$\begin{cases} \varphi(1)\ \ \varphi(29) = 31^2, \\ \varphi(7)\ \ \varphi(23) = 31^2, \\ \varphi(11)\ \ \varphi(19) = 31^2, \\ \varphi(13)\ \ \varphi(17) = 31^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(2)\ \varphi(28) = 31, \\ \varphi(4)\ \varphi(26) = 31, \\ \varphi(8)\ \varphi(22) = 31, \\ \varphi(14)\,\varphi(16) = 31. \end{cases} \qquad \begin{matrix} \varphi(6)\ \varphi(24) = 1, \\ \varphi(10)\ \varphi(20) = 1, \\ \varphi(12)\ \varphi(18) = 1. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \varphi(3)\ \ \varphi(27) = 31, \\ \varphi(9)\ \ \varphi(21) = 31, \\ \varphi(5)\ \ \varphi(25) = 31. \end{cases}$$

Die zur Auswertung der Unterdeterminanten A_k nötige Rechnung reduciert sich auf fast die Hälfte, wenn man die folgende Beziehung berücksichtigt.

$$A_k = \frac{D}{p-1} \sum_{0}^{p-2}{}_i \frac{\alpha^{ik}}{\varphi(i)},$$
$$= \frac{D}{p-1} \sum_{0}^{\frac{1}{2}(p-3)}{}_i \left[\frac{\alpha^{2ik}}{\varphi(2i)} + \frac{\alpha^{(2i+1)k}}{\varphi(2i+1)}\right],$$
$$= \frac{D}{p-1}[A+B].$$

$$A_{k+\frac{1}{2}(p-1)} = \frac{D}{p-1} \sum_{0}^{p-2}{}_i \frac{\alpha^{i\left(k+\frac{p-1}{2}\right)}}{\varphi(i)}$$

$$= \frac{D}{p-1} \sum_{0}^{\frac{1}{2}(p-3)}{}_i \left[\frac{\alpha^{2i\left(k+\frac{p-1}{2}\right)}}{\varphi(2i)} + \frac{\alpha^{(2i+1)\left(k+\frac{p-1}{2}\right)}}{\varphi(2i+1)}\right]$$

$$A_{k+\frac{1}{2}(p-1)} = \frac{D}{p-1}\sum_{0}^{\frac{1}{2}(p-3)}\left[\frac{\alpha^{2i\cdot k}}{\varphi(2i)} - \frac{\alpha^{(2i+1)k}}{\varphi(2i+1)}\right], \text{ da}$$

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}} = -1 \quad \text{und} \quad \alpha^{p-1} = +1 \text{ ist,}$$

$$= \frac{D}{p-1}[A-B]$$

§ 4.

Berechnung sämtlicher Wurzeln aus einer von ihnen.

Bei dem Ausdruck der Wurzeln ε_i durch die mehrfach genannten Periodenprodukte ist es zweckmässig, diese cyklisch anzuordnen. Wir bezeichnen also die $\frac{p-1}{\pi_k}$ gliedrigen Perioden mit $u_{k,0}$, $u_{k,1}$, ... $u_{k,p_k^{\pi_k}-1}$ und setzen fest, dass die Indices i, die zur Unterscheidung dieser Perioden dienen, nach dem Modul $p_k^{\pi_k}$ genommen werden sollen, so dass, wenn n eine ganze Zahl bedeutet,

$$u_{k,i} = u_{k,n.p_k^{\pi_k}+i}, \qquad (k = 1, 2, \ldots \mu;\ i = 0, 1, 2, \ldots p_k^{\pi_k}-1)$$

ist. Ist dann eine erste Einheitswurzel ε_0 in der Form dargestellt:

$$\varepsilon_0 = a_0(u_{1,0}\cdot u_{2,0}\cdot \ldots u_{\mu,0}) + a_1(u_{1,1}\cdot u_{2,1}\cdot \ldots u_{\mu,1}) + \ldots +$$
$$+ a_{p-3}(u_{1,p_1^{\pi_1}-2}\cdot u_{2,p_2^{\pi_2}-2}\cdot \ldots u_{\mu,p_\mu^{\pi_\mu}-2}) +$$
$$+ a_{p-2}(u_{1,p_1^{\pi_1}-1}\cdot u_{2,p_2^{\pi_2}-1}\cdot \ldots u_{\mu,p_\mu^{\pi_\mu}-1}),$$

so erhält man die übrigen Wurzeln ε_1, ε_2, ... ε_{p-2} durch cyklische Vertauschung:

$$\varepsilon_1 = a_0(u_{1,1}\cdot u_{2,1}\ldots u_{\mu,1}) + a_1(u_{1,2}\cdot u_{2,2}\ldots u_{\mu,2}) + \ldots$$
$$+ a_{p-3}(u_{1,p_1^{\pi_1}-1}\cdot u_{2,p_2^{\pi_2}-1}\cdot \ldots u_{\mu,p_\mu^{\pi_\mu}-1}) +$$
$$+ a_{p-2}(u_{1,0}\cdot u_{2,0}\cdot \ldots u_{\mu,0}),$$

und wenn man

$$a_{k+p-1} = a_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots p-2)$$

setzt, allgemein:

$$\varepsilon_i = a_{p-1-i}(u_{1,0}\cdot u_{2,0}\cdots u_{\mu,0}) + a_{p-1-i+1}(u_{1,1}\cdot u_{2,1}\cdots u_{\mu,1}) + \cdots$$
$$+ a_{p-3-i}(u_{1,p_1{}^{\pi_1}-2}\cdot u_{2,p_2{}^{\pi_2}-2}\cdots u_{\mu,p_\mu{}^{\pi_\mu}-2}) +$$
$$+ a_{p-2-i}(u_{1,p_1{}^{\pi_1}-1}\cdot u_{2,p_2{}^{\pi_2}-1}\cdots u_{\mu,p_\mu{}^{\pi_\mu}-1}).$$

§ 5.

Beziehungen zwischen den Coëfficienten der Gaussschen Perioden.

Die Gleichung (1) von § 4 kann man auch in der Form schreiben

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_0 = u_{1,0}(a_0\cdot u_{2,0}\cdot u_{3,0}\cdots u_{\mu,0} + \\ + a_{p_1{}^{\pi_1}}\cdot u_{2,p_1{}^{\pi_1}}\cdot u_{3,p_1{}^{\pi_1}}\cdots u_{\mu,p_1{}^{\pi_1}} + \cdots \\ + a_{p-1-p_1{}^{\pi_1}}\cdot u_{2,p-1-p_1{}^{\pi_1}}\cdots u_{\mu,p-1-p_1{}^{\pi_1}}) \\ \quad + u_{1,1}(a_1\cdot u_{2,1}\cdot u_{3,1}\cdots u_{\mu,1} + \\ + a_{p_1{}^{\pi_1}+1}\cdot u_{2,p_1{}^{\pi_1}+1}\cdots u_{\mu,p_1{}^{\pi_1}+1} + \cdots \\ + a_{p-p_1{}^{\pi_1}}\cdot u_{2,p-p_1{}^{\pi_1}}\cdots u_{\mu,p-p_1{}^{\pi_1}}) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ + u_{1,p_1{}^{\pi_1}-1}(a_{p_1{}^{\pi_1}-1}u_{2,p_1{}^{\pi_1}-1}\cdots u_{\mu,p_1{}^{\pi_1}-1} + \\ + a_{2,p_1{}^{\pi_1}-1}\cdot u_{2,2p_1{}^{\pi_1}-1}\cdots u_{\mu,2p_1{}^{\pi_1}-1} + \cdots \\ + a_{p-2}\cdot u_{p_2{}^{\pi_2}-1}\cdots u_{\mu,p_\mu{}^{\pi_\mu}-1}) \end{array}\right.$$

Unterwirft man nun ε_0 den Substitutionen der Gruppe

$$S^i\cdot p_1{}^{\pi_1}\left[i = 0, 1, 2\ldots, \frac{p-1}{p_1{}^{\pi_1}}-1;\quad S = (0, 1, 2, \ldots, p-2)\right],$$

so geht $u_{1,k}$ stets wieder in $u_{1,k}$ über, $(k = 0, 1, 2, \ldots p_1{}^{\pi_1}-1)$. Dagegen nimmt das Produkt $u_{2,k}\cdot u_{3,l}\cdots u_{\mu,r}$ die $\frac{p-1}{p_1{}^{\pi_1}}$ Werte

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} u_{2,k}\cdot u_{3,l}\cdots u_{\mu,r} \\ u_{2,k+p_1{}^{\pi_1}}\cdot u_{3,l+p_1{}^{\pi_1}}\cdots u_{\mu,r+p_1{}^{\pi_1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{2,k+\frac{p-1}{p_1{}^{\pi_1}}-1}\cdot u_{3,l+\frac{p-1}{p_1{}^{\pi_1}}-1}\cdots u_{\mu,r+\frac{p-1}{p_1{}^{\pi_1}}-1} \end{array}\right. \text{an.}$$

Es soll zunächst bewiesen werden, dass diese Produkte sämtlich von einander verschieden sind.

Gehe nämlich $u_{2,k} \cdot u_{3,l} \ldots u_{\mu,r}$ durch die Substitution

$S^{s \cdot p_1^{\pi_1}}$ in $u_{2,k+p_1^{\pi_1} s} \cdot u_{3,l+s \cdot p_1^{\pi_1}} \ldots u_{\mu,l+s \cdot p_1^{\pi_1}}$, und durch

$S^{t \cdot p_1^{\pi_1}}$ in $u_{2,k+t \cdot p_1^{\pi_1}} \cdot u_{3,l+t \cdot p_1^{\pi_1}} \ldots u_{\mu,l+t \cdot p_1^{\pi_1}}$ über,

$$\left(s < \frac{p-1}{p_1^{\pi_1}}, \qquad t < \frac{p-1}{p_1^{\pi_1}} \right),$$

und sei

$$(3) \quad u_{2,k+s \cdot p_1^{\pi_1}} \cdot u_{3,l+s \cdot p_1^{\pi_1}} \ldots u_{\mu,r+s \cdot p_1^{\pi_1}} = u_{2,k+t \cdot p_1^{\pi_1}} \cdot u_{3,l+t \cdot p_1^{\pi_1}} \ldots u_{\mu,r+t \cdot p_1^{\pi_1}},$$

so muss

$$\begin{aligned} u_{2,k+s \cdot p_1^{\pi_1}} &= u_{2,k+t \cdot p_1^{\pi_1}} \\ u_{3,l+s \cdot p_1^{\pi_1}} &= u_{3,l+t \cdot p_1^{\pi_1}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{\mu,r+s \cdot p_1^{\pi_1}} &= u_{\mu,r+t \cdot p_1^{\pi_1}} \end{aligned}$$ sein.

Es folgt

$$\begin{aligned} s \cdot p_1^{\pi_1} &\equiv t \cdot p_1^{\pi_1} \bmod p_2^{\pi_2} \\ s \cdot p_1^{\pi_1} &\equiv t \cdot p_1^{\pi_1} \bmod p_3^{\pi_3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s \cdot p_1^{\pi_1} &\equiv t \cdot p_1^{\pi_1} \bmod p_\mu^{\pi_\mu}. \end{aligned}$$

Demnach ist, da $p_2, p_3 \ldots p_\mu$ von einander verschiedene Primzahlen sind,

$$\begin{aligned} s \cdot p_1^{\pi_1} &\equiv t \cdot p_1^{\pi_1} \bmod p_2^{\pi_2} \cdot p_3^{\pi_3} \ldots p_\mu^{\pi_\mu}, \\ &\equiv t \cdot p_1^{\pi_1} \bmod \frac{p-1}{p_1^{\pi_1}}; \end{aligned}$$

s und t müssen sich also um ein Vielfaches von $\frac{p-1}{p_1^{\pi_1}}$ von einander

unterscheiden. Dies ist nur möglich für $s = t$, da $s < \frac{p-1}{p_1^{\pi_1}}$ und $t < \frac{p-1}{p_1^{\pi_1}}$ ist. Folglich sind die Produkte (2) sämtlich von einander verschieden.

Nennen wir nun ihre Summe I, so folgt, da I die Summe der Produkte $(\mu-1)$ten Grades der sämtlichen nicht konjugierten Gaussschen Perioden ist, ausgenommen die, in welchen eines der $u_{1,0}$, $u_{1,1}$, $u_{1,p_1^{\pi_1}-1}$ als Faktor auftritt,

$$I = (u_{2,0} + u_{2,1} + \ldots + u_{2,p_2^{\pi_2}-1})(u_{3,0} + u_{3,1} + \ldots + u_{3,p_3^{\pi_3}}) \ldots (u_{\mu,0} + u_{\mu,1} + \ldots + u_{\mu,p_\mu^{\pi_\mu}-1})$$
$$= (-1)^{\mu-1}.$$

Unterwerfen wir nun die Gleichung (1) sämtlichen Substitutionen der Gruppe $S^{i \cdot p_1^{\pi_1}}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots \frac{p-1}{p_1^{\pi_1}} - 1)$, addieren wir diese Ausdrücke, und multiplizieren wir die neue Gleichung mit $(-1)^{\mu-1}$, so erhalten wir

$$(-1)^{\mu-1}(\varepsilon_0 + \varepsilon_{p_1^{\pi_1}} + \varepsilon_{2.p_1^{\pi_1}} + \ldots \varepsilon_{p-1-p_1^{\pi_1}}) =$$
$$= (-1)^{\mu-1} u_{1,0} = u_{1,0}(a_0 + a_{p_1^{\pi_1}} + a_{2,p_1^{\pi_1}} + \ldots + a_{p-1-p_1^{\pi_1}}) +$$
$$+ u_{1,1}(a_1 + a_{p_1^{\pi_1}+1} + a_{2,p_1^{\pi_1}+1} + \ldots + a_{p-p_1^{\pi_1}}) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ u_{1,p_1^{\pi_1}-1}(a_{p_1^{\pi_1}-1} + a_{2.p_1^{\pi_1}-1} + \ldots + a_{p-2}).$$

Da nun zwischen den $u_{1,i}$ nur die eine rationale Beziehung

$$1 + \sum_{0}^{p_1^{\pi_1}-1} u_{1,i} = 0$$

bestehen kann, so folgt, wenn wir den Index 1 durch einen beliebigen ersetzen:

$$a_0 + a_{p_i^{\pi_i}} + a_{2.p_i} + \ldots + a_{p-1-p_i^{\pi_i}} = (-1)^{\mu-1}$$

$$a_k + a_{k+p_i^{\pi_i}} + a_{k+2\,p_i^{\pi_1}} + \ldots + a_{k+p-1-p_i^{\pi_i}} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots \mu; \quad k = 1, 2, \ldots p_i^{\pi_i} - 1).$$

Der Grundgedanke der hier angewendeten Methode, nämlich die Darstellbarkeit der Einheitswurzeln ε als linearer Funktionen gewisser Periodenprodukte ist mir von Herrn Professor Study gegeben worden.

p = 7.

Die primitiven siebenten Einheitswurzeln sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_0^6 x^i = 0.$$

Eine primitive siebente Kongruenzwurzel ist 3, so dass

Index	0	1	2	3	4	5
Numerus	1	3	2	−1	−3	−2

eine Indextabelle ist.

Wir haben nun also, da $p-1 = 6 = 2.3$ ist, die beiden dreigliedrigen u_0 und u_1 und die drei zweigliedrigen Gaussschen Perioden v_0, v_1, v_2 aufzustellen und zu berechnen.

Die dreigliedrigen Gaussschen Perioden sind

$$u_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{2+i} + \varepsilon_{4+i}, \qquad (i = 0, 1). \tag{1}$$

Sie sind demnach die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + u + 2 = 0,$$

woraus folgt

$$2u_0 = -1 + \sqrt{-7}, \qquad 2u_1 = -1 - \sqrt{-7}. \tag{2}$$

Die zweigliedrigen Perioden sind

$$v_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{3+i}, \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{3}$$

Verstehen wir unter η und η^2 die primitiven dritten Einheitswurzeln

$$2\eta = -1+\sqrt{-3}, \qquad 2\eta^2 = -1-\sqrt{-3},$$

und setzen wir ferner

$$\chi_{i,k} = \eta^{-ik}(v_0+\eta^i v_1+\eta^{2i}v_2) \qquad (i=1,2;\ k=0.1,2), \tag{4}$$

so folgt, da

$$\chi^3{}_i = \chi^3{}_{i,0} = \chi^3{}_{i,1} = \chi^3{}_{i,2} \text{ ist,}$$

$$\chi^3{}_i = -7(2\eta^i+\eta^{2i}) \qquad (i=1,2) \tag{5}$$

Unter Benutzung der aus Gleichung (4) sich ergebenden Abhängigkeit

$$\chi_{1,k}\cdot\chi_{2,k} = 7 \tag{6}$$

folgt

$$\begin{aligned} 3v_i &= -1+\chi_{1,i}+\chi_{2,i}, \\ &= -1+\eta^i\cdot\chi_{1,0}+\eta^{-2i}\chi_{2,0}. \end{aligned} \qquad (i=0,1,2) \tag{7}$$

Als Produkt von u_0 und v_0 ergiebt sich

$$u_0\cdot v_0 = \varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_4. \tag{8}$$

Aus dieser Gleichung folgen durch cyklische Vertauschung fünf neue (s. § 1.), z. B. als nächste

$$u_1\cdot v_1 = \varepsilon_2-\varepsilon_4-\varepsilon_5.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 7\varepsilon_0 = &-4u_0v_0-u_0v_1-2u_0v_2 \\ &-3u_1v_0+u_1v_1+2u_1v_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Es genügt die Berechnung einer einzigen Wurzel (s. § 4.), da aus dieser die übrigen durch cyklische Vertauschung erhalten werden können, z. B.

$$\begin{aligned} 7\varepsilon_1 = &-4u_1v_1-u_1v_2-2u_1v_0 \\ &-3u_0v_1+u_0v_2+2u_0v_0 \end{aligned}$$

p = 11.

Die primitiven elften Einheitswurzeln ε_i sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_0^{10} x^i = 0.$$

Eine primitive 11. Kongruenzwurzel ist 2, so dass

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Numerus	1	2	4	−3	5	−1	−2	−4	3	−5

eine Indextabelle ist.

Die Zahl $p-1=10$ zerfällt in die beiden Primfaktoren 2 und 5. Wir haben daher die beiden fünf- und die fünf zweigliedrigen Gauss'schen Perioden zu bilden.

Die beiden fünfgliedrigen Perioden sind

$$u_i = \varepsilon_i+\varepsilon_{2+i}+\varepsilon_{4+i}+\varepsilon_{6+i}+\varepsilon_{8+i}, \qquad (i=0,\ 1). \tag{1}$$

Demnach sind u_0 und u_1 die Wurzeln der Gleichung

$$u^2+u+3=0,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} 2u_0 &= -1+\sqrt{-11}, \\ 2u_1 &= -1+\sqrt{-11}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die fünf zweigliedrigen Perioden sind

$$w_i = \varepsilon_i+\varepsilon_{5+i}, \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{3}$$

Verstehen wir nun unter ζ, ζ^2, ζ^3, ζ^4 die vier primitiven fünften Einheitswurzeln

$$\left.\begin{aligned} 4\zeta &= -1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \\ 4\zeta^2 &= -1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \\ 4\zeta^3 &= -1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \\ 4\zeta^4 &= -1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \end{aligned}\right\} \quad \sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$$

und setzen wir ferner

$$\chi_{i,k} = \zeta^{-ik}(w_0+\zeta^i w_1+\zeta^{2i}w_2+\zeta^{3i}w_3+\zeta^{4i}w_4), \tag{4}$$
$$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

so ist

$$\chi^5_{i,0}=\chi^5_{i,1}=\chi^5_{i,2}=\chi^5_{i,3}=\chi^5_{i,4}=\chi^5_i,$$

und es folgt

$$\chi_i^5 = 11(6\zeta^i+41\zeta^{2i}+16\zeta^{3i}+26\zeta^{4i}) \tag{5}$$

Unter Berücksichtigung der sich aus den Gleichungen (4) ergebenden Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} &\chi_{1,k}\cdot\chi_{4,k}=11, \\ &\chi^2_{1,k}\cdot\chi_{3,k}=11(2\zeta-2\zeta^2-\zeta^3), \\ &\chi^3_{1,k}\cdot\chi_{2,k}=11(10\zeta+6\zeta^2+12\zeta^3+3\zeta^4), \end{aligned}\right. \quad (k=0,1,2,3,4) \tag{6}$$

erhalten wir

$$(7)\qquad \begin{aligned} 5v_i &= -1+\chi_{1,i}+\chi_{2,i}+\chi_{3,i}+\chi_{4,i},\\ &= -1+\zeta^{-i}\chi_{1,0}+\zeta^{-2i}\chi_{2,0}+\zeta^{-3i}\chi_{3,0}+\varepsilon^{-4i}\chi_{4,0}\end{aligned}$$

Das Produkt von u_0 und v_0 ist

$$(8)\qquad u_0 \cdot v_0 = -\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_6-\varepsilon_7$$

Aus dieser Gleichung und den neun übrigen, die sich durch cyklische Vertauschung aus ihr ergeben, folgt.

$$(9)\qquad \begin{aligned} 11\,\varepsilon_0 = &-7u_0\cdot v_0-u_0v_1-u_0v_2 &&-2u_0v_4\\ &-4u_1\cdot v_0+u_1v_1+u_1v_2 &&+2u_1v_4\end{aligned}$$

An diesem Beispiel möge gezeigt werden, wie die numerische Berechnung von $\chi^5_{1,0}$, resp. den in den anderen Beispielen analog gebildeten Ausdrücken erfolgt ist. Verstehen wir unter $\Sigma w_0{}^i w_1{}^k w_2{}^m w_3{}^n w_4{}^r$ einen Ausdruck

$$\begin{aligned}\Sigma w_0{}^i w_1{}^k w_2{}^m w_3{}^n w_4{}^r = {}& w_0{}^i w_1{}^k w_2{}^m w_3{}^n w_4{}^r + w_1{}^i w_2{}^k w_3{}^m w_4{}^n w_0{}^r\\ &+ w_2{}^i w_3{}^k w_4{}^m w_0{}^n w_1{}^r + w_3{}^i w_4{}^k w_0{}^m w_1{}^n w_2{}^r\\ &+ w_4{}^i w_0{}^k w_1{}^m w_2{}^n w_3{}^r,\end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned}\chi_{1,0}{}^5 = {}& \Sigma w_0{}^5 +\\ &+5(\quad * \quad + \zeta\Sigma w_0{}^4 w_1 + \zeta^2\Sigma w_0{}^4 w_2 +\\ &\qquad + \zeta^3\Sigma w_0{}^4 w_3 + \zeta^4\Sigma w_0{}^4 w_4) +\\ &+10(\quad * \quad + \zeta\Sigma w_0{}^3 w_3{}^2 + \zeta^3\Sigma w_0{}^3 w_4{}^2 +\\ &\qquad + \zeta^3\Sigma w_0{}^3 w_4{}^2 + \zeta^4\Sigma w_0{}^3 w_2{}^2) +\\ &+20(\Sigma w_0{}^3 w_1 w_4 + \Sigma w_0{}^3 w_2 w_3\\ &\qquad + \zeta\Sigma w_0{}^3 w_2 w_4 + \zeta^2\Sigma w_0{}^3 w_3 w_4 +\\ &\qquad + \zeta^3\Sigma w_0{}^2 w_1 w_2 + \zeta^4\Sigma w_0{}^3 w_1 w_3) +\\ &+30(\Sigma w_0{}^2 w_1{}^2 w_3 + \Sigma w_0{}^2 w_2{}^2 w_1 + \zeta\Sigma w_0{}^2 w_1{}^2 w_4 + \zeta^2\Sigma w_0{}^2 w_2{}^2 w_3 +\\ &\qquad + \zeta^3\Sigma w_0{}^2 w_2{}^2 w_4 + \zeta^4\Sigma w_0{}^2 w_1{}^2 w_2) +\\ &+60(\quad * \quad + \zeta\Sigma w_0{}^2 w_1 w_2 w_3 + \zeta^2\Sigma w_0{}^2 w_1 w_2 w_4 +\\ &\qquad + \zeta^3\Sigma w_0{}^2 w_1 w_3 w_4 + \zeta^4\Sigma w_0{}^2 w_2 w_3 w_4)\\ &+120 w_0 w_1 w_2 w_3 w_4.\end{aligned}$$

Um den Wert von $\chi^5_{1,0}$ zu erhalten, haben wir jeden dieser Summanden einzeln zu berechnen.

Durch direkte Multiplikation ergiebt sich

$$\begin{aligned}
w_0 . w_0 &= 2 + w_1,\\
w_0 . w_1 &= w_0 + w_3,\\
w_0 . w_2 &= w_3 + w_4. \text{ Durch cyklische Vertauschung folgt}\\
w_0 . w_3 &= w_1 + w_2,\\
w_0 . w_4 &= w_2 + w_4.
\end{aligned}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned}
\Sigma w_0^2 &= +9,\\
\Sigma w_0 w_1 &= -2,\\
\Sigma w_0 w_2 &= -2,\\
\Sigma w_0 w_3 &= -2,\\
\Sigma w_0 w_4 &= -2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\Sigma w_0^3 = \Sigma w_0 . w_0^2 = \Sigma w_0 (2 + w_1) = 2\Sigma w_0 + \Sigma w_0 w_1 = -4.$$

Nach dieser Berechnungsmethode ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\Sigma w_0^3 &= -4, & \Sigma w_0 w_1 w_2 &= -4,\\
\Sigma w_2^2 w_1 &= +7, & \Sigma w_0^2 w_3 &= -4,\\
\Sigma w_0^2 w_2 &= -4, & \Sigma w_0^2 w_4 &= -4.
\end{aligned}$$

$$\Sigma w_0^4 = 25$$

$$\begin{aligned}
\Sigma w_0^3 w_1 &= -8, & \Sigma w_0^2 w_3 &= 3,\\
\Sigma w_0^3 w_2 &= -8, & \Sigma w_0^3 w_4 &= -8,\\
\Sigma w_0^2 w_1^2 &= 14, & \Sigma w_0^2 w_3^2 &= 14,\\
\Sigma w_0^2 w_2^2 &= 14, & \Sigma w_0^2 w_4^2 &= 14,\\
\Sigma w_0^2 w_1 w_2 &= 3, & \Sigma w_0^2 w_2 w_3 &= -8,\\
\Sigma w_0^2 w_1 w_3 &= -8, & \Sigma w_0^2 w_2 w_4 &= 3,\\
\Sigma w_0^2 w_1 w_4 &= -8, & \Sigma w_0^2 w_3 w_4 &= 3,\\
\Sigma w_0 w_1 w_2 w_3 &= 3, & \Sigma w_0 w_1 w_3 w_4 &= 3,\\
\Sigma w_0 w_1 w_2 w_4 &= 3, & \Sigma w_0 w_2 w_3 w_4 &= 3.
\end{aligned}$$

$\Sigma w_0^2 w_3^2$ wurde durch cyklische Vertauschung aus $\Sigma w_0^2 w_2^2$;
$\Sigma w_0^2 w_4^2$ aus $\Sigma w_0^2 w_1^2$; $\Sigma w_0^2 w_1 w_2 w_4$, $\Sigma w_0^2 w_1 w_3 w_4$,
$\Sigma w_0^2 w_2 w_3 w_4$ aus $\Sigma w_0^2 w_1 w_2 w_3$ erhalten.

Mehr Ausdrücke vom 4. Grade in Bezug auf die w zu bezeichnen ist nicht nötig, weil mit den bisher aufgestellten bereits sämtliche vom 5. Grade berechnet werden können.

Es folgt schliesslich

$$\Sigma w_0^5 = -16$$

$$\Sigma w_0^4 w_1 = 28;\ \Sigma w_0^4 w_2 = -5;\ \Sigma w_0^4 w_3 = -16;\ \Sigma w_0^4 w_4 = -16$$

$$\Sigma w_0^3 w_3^2 = -16;\ \Sigma w_0^3 w_1^2 = -16;\ \Sigma w_0^3 w_4^2 = 17;\ \Sigma w_0^3 w_2^2 = -5$$

$$\Sigma w_0^3 w_1 w_4 = -5;\ \Sigma w_0^3 w_2 w_3 = 17;$$

$$\Sigma w_0^3 w_2 w_4 = 17;\ \Sigma w_0^3 w_3 w_4 = -5;\ \Sigma w_0^3 w_1 w_2 = -16;\ \Sigma w_0^3 w_1 w_3 = 17$$

$$\Sigma w_0^2 w_1^2 w_3 = -16;\ \Sigma w_0^2 w_2^2 w_1 = 6;$$

$$\Sigma w_0^2 w_1^2 w_4 = -5;\ \Sigma w_0^2 w_2^2 w_3 = 6;\ \Sigma w_0^2 w_2^2 w_4 = -5;\ \Sigma w_0^2 w_1^2 w_3 w_4 = 6$$

$$\Sigma w_0^2 w_1 w_2 w_3 = -5;\ \Sigma w_0^2 w_1 w_2 w_4 = 6;\ \Sigma w_0^2 w_1 w_3 w_4 = 6;\ \Sigma w_0^2 w_2 w_3 w_4 = -5$$

$$w_0 w_1 w_2 w_3 w_4 = -1$$

Demnach ergiebt sich

$$\begin{aligned}\chi_{1,0} &= -196 - 130\xi + 255\xi^2 - 20\xi^3 + 90\xi^4 \\ &= 66\xi + 451\xi^2 + 176\xi^3 + 286\xi^4 \\ &= 11(6\xi + 41\xi^2 + 16\xi^3 + 26\xi^4)\end{aligned}$$

$p = 13.$

Die primitiven dreizehnten Einheitswurzeln sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_0^{12} x^i = 0.$$

Eine primitive dreizehnten Kongruenzwurzel ist 2, so dass

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Numerus	1	2	4	−5	3	6	−1	−2	−4	5	−3	−6

eine Indextabelle ist.

Die Zahl $p-1 = 12$ ist in die beiden Primzahlpotenzen 2^2 und 3 zerlegbar. Wir haben daher die drei viergliedrigen und die vier dreigliedrigen Gaussschen Perioden zu bilden.

Die vier dreigliedrigen Perioden sind

$$(1) \qquad u_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{4+i} + \varepsilon_{8+i}, \qquad (i = 0, 2, 3).$$

u_0, u_1, u_2, u_3 sind die Wurzeln einer cyklischen Gleichung 4. Grades; wir berechnen sie, indem wir zwei Gleichungen 2. Grades hinter einander auflösen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$(2) \qquad w_i = u_i + u_{2+i}, \qquad (i = 0, 1).$$

Es ergiebt sich dann

$$w_0 + w_1 = -1, \qquad w_0 . w_1 = -3.$$

w_0 und w_1 sind daher die Wurzeln der Gleichung

$$w^2 + w - 3 = 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 2w_0 &= -1 + \sqrt{13}, \\ 2w_1 &= -1 - \sqrt{13}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} u_0 + u_2 &= w_0, & u_0 \cdot u_2 &= 3 + w_1, \\ u_1 + u_3 &= w_1, & u_1 \cdot u_3 &= 3 + w_0. \end{aligned}$$

Demnach sind u_0 und u_2, resp. u_1 und u_3, die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - w_0 u + (3 + w_1) = 0,$$
$$\text{resp. } u^2 - w_1 u + (3 + w_0) = 0.$$

Berücksichtigen wir die aus den Gleichungen (1) und (3) folgende Beziehung

$$(u_0 - u_2)(u_1 - u_3) = -w_0 + w_1 = -\sqrt{13}, \tag{4}$$

und setzen wir ferner

$$\sqrt{8w_0 + 5w_1} \cdot \sqrt{5w_0 + 8w_1} = \sqrt{13},$$

so folgt

$$\begin{aligned} 2u_0 &= w_0 + \sqrt{8w_0 + 5w_1}, \\ 2u_1 &= w_1 - \sqrt{8w_1 + 5w_0}, \\ 2u_2 &= w_0 - \sqrt{8w_0 + 5w_1}, \\ 2u_3 &= w_1 + \sqrt{8w_1 + 5w_0}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die dreigliedrigen Perioden sind

$$v_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{3+i} + \varepsilon_{6+i} + \varepsilon_{9+i}, \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{6}$$

Verstehen wir unter η und η^2 wieder die primitiven dritten Einheitswurzeln und setzen

$$\chi_{i,k} = \eta^{-i,k}(v_0 + \eta^i v_1 + \eta^{2i} v_2), \qquad (i = 1, 2;\ k = 0, 1, 2), \tag{7}$$

so folgt, da $\chi^3_{i,0} = \chi^3_{i,1} = \chi^3_{i,2} = \chi^3_i$ ist.

$$\chi^3_i = 13(\eta^i + 4\eta^{2i}), \qquad (i = 1, 2). \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung der sich aus den Gleichungen (7) ergebenden Bedingung

$$\chi_{1,k} \cdot \chi_{2,k} = 13 \tag{9}$$

erhalten wir demnach aus diesen Gleichungen

$$\begin{aligned} 3v_i &= -1 + \chi_{1,i} + \chi_{2,i} \\ &= -1 + \eta^{-i}\chi_{1,0} + \eta^{-2i}\chi_{2,0} \end{aligned} \tag{10}$$

Das Resultat der Multiplikation von u_0 und v_0 ist

$$(11) \qquad u_0 \cdot v_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_6 - \varepsilon_9 - \varepsilon_{11}.$$

Aus dieser Gleichung und den 11 aus ihr durch cyklische Vertauschung abzuleitenden folgt

$$(12) \qquad \begin{array}{rl} 13\,\varepsilon_0 = & -\,6u_0v_0 - 3u_0v_1 - 4u_0v_2 \\ & -\,u_1v_0 \qquad\quad + u_1v_2 \\ & -\,3u_2v_0 + 2u_2v_1 + u_2v_2 \\ & -\,3u_3v_0 + u_3v_1 + 2u_3v_2 \end{array}$$

$$\mathfrak{p} = 19.$$

Die primitiven 19. Einheitswurzeln ε_i sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_0^{18} x^i = 0.$$

Eine primitive 19. Kongruenzwurzel ist 2, so dass

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Numerus	1	2	4	8	−3	−6	7	−5	9	−1	−2	−4	−8	3	6	−7	5	−9

eine Indextabelle ist.

Da $18 = 2 \cdot 3^2$ ist, so haben wir zwei neungliedrige und neun zweigliedrige Gaussche Perioden zu bilden.

Die beiden neungliedrigen Perioden sind

$$(1) \qquad u_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{2+i} + \varepsilon_{4+i} + \varepsilon_{6+i} + \varepsilon_{8+i} + \varepsilon_{10+i} + \varepsilon_{12+i} + \varepsilon_{14+i} + \varepsilon_{16+i}, \quad (i = 0, 1).$$

Sie sind demnach die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + u + 5 = 0.$$

Es folgt

$$(2) \qquad \begin{aligned} 2u_0 &= -1 + \sqrt{-19}, \\ 2u_1 &= -1 - \sqrt{-19}. \end{aligned}$$

Die neun zweigliedrigen Gaussschen Perioden sind

$$(3) \qquad v_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{9+i}, \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).$$

Sie sind die Wurzeln einer cyklischen Gleichung vom 9. Grade. Wir berechnen sie daher durch Hintereinanderauflösung zweier Gleichungen 3. Grades. Zu diesem Zweck setzen wir

$$w_i = v_i + v_{3+i} + v_{6+i}, \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{4}$$

$$\chi_{i,k} = \eta^{-ik}(w_0 + \eta^i w_1 + \eta^{2i} w_2), \qquad (i = 1, 2;\ k = 0, 1, 2). \tag{5}$$

Dann folgt, da $\chi^3_{i,0} = \chi^3_{i,1} = \chi^3_{i,2} = \chi^3_i$ ist,

$$\chi^3_i = -19(5\eta^i + 2\eta^{2i}), \qquad (i = 1, 2). \tag{6}$$

Unter Berücksichtigung der sich aus den Gleichungen (5) ergebenden Bedingung

$$\chi_{1,k} \cdot \chi_{2,k} = 19 \qquad \text{folgt}$$

$$\begin{aligned} 3w_i &= -1 + \chi_{1,i} + \chi_{2,i}, \\ &= -1 + \eta^{-i}\chi_{1,0} + \eta^{-2i}\chi_{2,0}. \end{aligned} \tag{7}$$

Bestimmen wir nun schliesslich

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_{i,k} &= \eta^{-ik}(v_0 + \eta^i v_3 + \eta^{2i} v_6), \\ \psi'_{i,k} &= \eta^{-ik}(v_1 + \eta^i v_4 + \eta^{2i} v_7), \\ \psi''_{i,k} &= \eta^{-ik}(v_2 + \eta^i v_5 + \eta^{2i} v_8), \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2;\ k = 0, 1, 2), \tag{8}$$

so folgt, da

$$\begin{aligned} &\psi^3_{i,0} = \psi^3_{i,1} = \psi^3_{i,2} = \psi^3_i, \\ &\psi'^3_{i,0} = \psi'^3_{i,1} = \psi'^3_{i,2} = \psi'^3_i \\ &\psi''^3_{i,0} = \psi''^3_{i,1} = \psi''^3_{i,2} = \psi''^3_i \qquad \text{ist,} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi^3_i &= \eta^i(15w_0 + 5w_1 + 18w_2) + \eta^{2i}(15w_0 + 8w_1 + 15w_2), \\ \psi'^3_i &= \eta^i(18w_0 + 15w_1 + 5w_2) + \eta^{2i}(15w_0 + 15w_1 + 8w_2), \\ \psi''^3_i &= \eta^i(5w_0 + 18w_1 + 15w_2) + \eta^{2i}(8w_0 + 15w_1 + 15w_2). \end{aligned} \right. \tag{9}$$

ψ'^3_i und ψ''^3_i erhält man hierbei durch cyklische Vertauschung der w aus ψ^3_i. Unter Berücksichtigung der sich aus den Gleichungen (9) ergebenden Bedingungen

$$\left\{ \begin{aligned} &\psi_{1,k} \cdot \psi_{2,k} = 7 + 2w_1, \\ &\psi'_{1,k} \cdot \psi'_{2,k} = 7 + 2w_2, \\ &\psi''_{1,k} \cdot \psi''_{2,k} = 7 + 2w_0 \qquad \text{und} \\ &\psi_{1,i}\psi'_{1,i}\psi''_{1,i} = \eta(-3w_0 + w_1 + 2w_2) + \eta^2(-w_0 - 2w_1 + 3w_2) \end{aligned} \right. \tag{10}$$

folgt

$$\begin{aligned} 3v_i &= -w_0 + \eta^{-i}\psi'_{1,0} + \eta^{-2i}\psi'_{2,0} = -w_0 + \psi'_{1,i} + \psi'_{2,i}, \\ 3v_{i+1} &= -w_1 + \eta^{-i}\psi'_{1,0} + \eta^{-2i}\psi'_{2,0} = -w_1 + \psi'_{1,i} + \psi'_{2,i}, \\ 3v_{i+2} &= -w_2 + \eta^{-i}\psi''_{1,0} + \eta^{-2i}\psi''_{2,0} = -w_2 + \psi''_{1,i} + \psi''_{2,i}. \end{aligned} \tag{11}$$

Als Resultat der Multiplikation von u_0 und v_0 folgt

(12) $$u_0 \cdot v_0 = -\varepsilon_0+\varepsilon_3-\varepsilon_5-\varepsilon_7-\varepsilon_8-\varepsilon_{12}+\varepsilon_{14}+\varepsilon_{16}+\varepsilon_{17}.$$

Aus dieser Gleichung und den sich aus ihr durch cyklische Vertauschung ergebenden 17 übrigen folgt (13)

$$\begin{aligned} 19\varepsilon_0 = &-11u_0v_0-2u_0v_1 \quad -u_0v_3 \quad -u_0v_5-2u_0v_6-u_0v_7-u_0v_8 \\ &-8u_1v_0+2u_1v_1 \quad +u_1v_3 \quad +u_1v_5+2u_1v_6+u_1v_7+u_1v_8 \end{aligned}$$

p = 29.

Die primitiven 29. Einheitswurzeln ε_i sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_0^{28} i\, x^i = 0.$$

Eine primitive 29. Congruenzwurzel ist 2, so dass

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Numerus	1	2	4	8	−13	3	6	12	−5	−10	9	−11	7	14

Index	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Numerus	−1	−2	−4	−8	13	−3	−6	−12	5	10	−9	11	−7	−14

eine Indextabelle ist.

Die Zahl $p-1 = 28$ ist in die beiden Primzahlpotenzen 2^2 und 7 zerlegbar. Wir haben daher die 7 viergliedrigen und die 4 siebengliedrigen Gaussschen Perioden zu bilden.

Die 4 siebengliedrigen Perioden sind

(1) $$u_i = \varepsilon_i+\varepsilon_{4+i}+\varepsilon_{8+i}+\varepsilon_{12+i}+\varepsilon_{16+i}+\varepsilon_{20+i}+\varepsilon_{24+i}, \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Die w ergeben sich demnach als die Wurzeln einer cyklischen Gleichung 4. Grades. Wir lösen dieselbe durch Hintereinanderauflösung zweier Gleichungen 2. Grades. Zu diesem Zweck setzen wir

(1) $$w_i = u_i + u_{2+i}, \qquad (i = 0, 1).$$

Es ergiebt sich dann

$$w_0+w_1 = -1, \qquad w_0 \cdot w_1 = -7.$$

w_0 und w_1 sind demnach die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$w^2+w-7 = 0.$$

Es folgt

$$2w_0 = -1+\sqrt{29},$$
$$2w_1 = -1-\sqrt{29}. \tag{3}$$

Da nun ferner

$$u_0+u_2 = w_0, \qquad u_0u_2 = -5w_0-6w_1,$$
$$u_1+u_3 = w_1, \qquad u_1u_3 = -6w_0-5w_1 \text{ sind,}$$

so sind u_0 und u_2, resp. u_1 und u_3 die Wurzeln der Gleichung

$$u_2 - w_0u - 5w_0 - 6w_1 = 0,$$

resp.

$$u^2 - w_1u - 6w_0 - 5w_1 = 0.$$

Setzen wir nun

$$\sqrt{-12w_0-17w_1}\ \sqrt{-17w_0-12w_1} = \sqrt{29},$$

so folgt unter Berücksichtigung der sich aus Gleichung (1) und (3) ergebenden Beziehung

$$(u_0-u_2)(u_1-u_3) = -w_0+w_1 = -\sqrt{29}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 2u_0 &= w_0+\sqrt{-12w_0-17w_1},\\ 2u_1 &= w_1-\sqrt{-17w_0-12w_1},\\ 2u_2 &= w_0-\sqrt{-12w_0-17w_1},\\ 2u_3 &= w_1+\sqrt{-17w_0-12w_1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die 7 viergliedrigen Perioden sind

$$s_i = \varepsilon_i+\varepsilon_{7+i}+\varepsilon_{14+i}+\varepsilon_{21+i}, \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6). \tag{6}$$

Setzen wir nun

$$\chi_{i,k} = \xi^{-ik}(s_0+\xi^i s_1+\xi^{2i}s_2+\xi^{3i}s_3+\xi^{4i}s_4+\xi^{5i}s_5+\xi^{6i}s_6), \tag{7}$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. 5, 6)$$

In diesen Gleichungen sei ξ eine primitive siebente Einheitswurzel. Dann folgt, da

$$\chi^7_{i,0} = \chi^7_{i,1} = \chi^7_{i,2} = \chi^7_{i,3} = \chi^7_{i,4} = \chi^7_{i,5} = \chi^7_{i,6} = \chi^7_i \text{ ist,}$$

$$\chi^7_i = 29(288\xi^i - 34\xi^{2i}+3746\xi^{3i}+2717\xi^{4i}+666\xi^{5i}+3578\xi^{6i}). \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung der aus den Gleichungen (7) sich ergebenden Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned} &\chi_{1,k}\cdot\chi_{6,k} = 29,\\ &\chi^2_{1,k}\cdot\chi_{5,k} = 29(-4\xi_2+2\xi^4-\xi^5+2\xi^6),\\ &\chi^3_{1,k}\cdot\chi_{4,k} = 29(12\xi-12\xi^2-12\xi^3-18\xi^4-3\xi^5-14\xi^6),\\ &\xi^4_{1,k}\cdot\chi_{3,k} = 29(70\xi+88\xi^2+144\xi^3+54\xi^4+180\xi^5+79\xi^6),\\ &\chi^5_{1,k}\cdot\chi_{2,k} = 29(-1010\xi-524\xi^2-520\xi^3-630\xi^4-360\xi^5,\\ &\qquad\qquad -245\xi^6), \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

folgt

$$s_i = -1 + \chi_{1,i} + \chi_{2,i} + \chi_{3,i} + \chi_{4,i} + \chi_{5,i} + \chi_{6,i}$$
$$= -1 + \xi^{-i}\chi_{1,0} + \xi^{-2i}\chi_{2,0} + \xi^{-3i}\chi_{3,0} + \xi^{-4i}\chi_{4,0} + \xi^{-5i}\chi_{5,0} + \xi^{-6i}\chi_{6,0}.$$

Das Produkt von u_0 und s_0 ist

(11) $$u_0 s_0 = -\varepsilon_0 + 2\varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + 2\varepsilon_8 + \varepsilon_9 - \varepsilon_{10} - \varepsilon_{13} - \varepsilon_{15} + \varepsilon_{18} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{23} - \varepsilon_{24}.$$

Aus dieser Gleichung und den 27 übrigen, die aus ihr durch cyklische Vertauschung abgeleitet werden können, folgt (12)

$$29\varepsilon_0 = -11u_0s_0 - 3u_0s_1 - 3u_0s_2 - 4u_0s_3 - 4u_0s_4 - 3u_0s_5 - u_0s_6$$
$$- 6u_1s_0 + u_1s_1 + u_1s_2 + u_1s_3 + 3u_1s_4$$
$$- 6u_2s_0 + 2u_2s_1 + u_2s_2 + 2u_2s_3 + u_2s_5$$
$$- 6u_3s_0 + u_3s_2 + u_3s_3 + u_3s_4 + 2u_3s_5 + u_3s_6$$

p = 31.

Die primitiven 31. Einheitswurzeln ε_1 sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_0^{30} i\chi^i = 0.$$

Eine primitive 31. Kongruenzwurzel ist 3, so dass

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Numerus	1	3	9	−4	−12	−5	−15	−14	−11	−2	−6	13	8	−7	10
Index	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Numerus	−1	−3	−9	4	12	5	15	14	11	2	6	−13	−8	7	−10

eine Indextabelle ist.

Die Zahl $p - 1 = 30$ zerfällt in die drei Primfaktoren 2, 3, 5. Wir haben demnach die beiden fünfzehngliedrigen, die drei zehngliedrigen und die fünf sechsgliedrigen Gauss schen Perioden zu bilden.

Die beiden fünfzehngliedrigen Perioden sind

(1) $$u_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{2+i} + \varepsilon_{4+i} + \varepsilon_{6+i} + \varepsilon_{8+i} + \varepsilon_{10+i} + \varepsilon_{12+i} + \varepsilon_{14+i} + \varepsilon_{16+i} + \varepsilon_{18+i} + \varepsilon_{20+i} + \varepsilon_{22+i} + \varepsilon_{24+i} + \varepsilon_{26+i} + \varepsilon_{28+i}, \qquad (i = 0, 1).$$

Es ergiebt sich

$$u_0 + u_1 = -1, \qquad u_0 u_1 = 8.$$

Demnach sind u_0 und u_1 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$u^2 + u + 8 = 0.$$

Es folgt

$$2u_0 = -1 + \sqrt{-31},$$
$$2u_1 = -1 - \sqrt{-31}. \tag{2}$$

Die drei zehngliedrigen Perioden sind

$$v_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{3+i} + \varepsilon_{6+i} + \varepsilon_{9+i} + \varepsilon_{12+i} + \varepsilon_{15+i} + \varepsilon_{18+i} + \varepsilon_{21+i} + \varepsilon_{24+i} + \varepsilon_{27+i}, \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{3}$$

Verstehen wir unter η und η^2 wieder die primitiven dritten Einheitswurzeln und setzen

$$\chi_{i,k} = \eta^{-i.k}(v_0 + \eta^i v_1 + \eta^{2i} v_2) \qquad (i = 1, 2;\ k = 0, 1, 2), \tag{4}$$

so folgt, da

$$\chi^3_i = \chi^3_{i,0} = \chi^3_{i,1} = \chi^3_{i,2}, \qquad (i = 1, 2)$$ ist

$$\chi^3_i = 31(\eta^i - 5\eta^{2i}), \qquad (i = 1, 2). \tag{5}$$

Unter Berücksichtigung der sich aus den Gleichungen (4) ergebenden Bedingung

$$\chi_{1,k} \cdot \chi_{2,k} = 31 \tag{6}$$

erhalten wir sodann

$$\begin{aligned} 3v_i &= -1 + \chi_{1,i} + \chi_{2,i} \\ &= -1 + \eta^{-i}\chi_{1,0} + \eta^{-2i}\chi_{2,0} \qquad (i = 0, 1, 2) \end{aligned} \tag{7}$$

Die fünf sechsgliedrigen Perioden sind schliesslich

$$w_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{5+i} + \varepsilon_{10+i} + \varepsilon_{15+i} + \varepsilon_{20+i} + \varepsilon_{25+i}, \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

Setzen wir noch, indem wir unter ζ eine primitive fünfte Einheitswurzel verstehen,

$$\psi_{i,k} = \zeta^{-i.k}(w_0 + \zeta^i w_1 + \zeta^{2i} w_2 + \zeta^{3i} w_3 + \zeta^{4i} w_i), \qquad (i = 1, 2, 3, 4;\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{9}$$

so ergiebt sich, da

$$\psi^5_i = \psi^5_{i,0} = \psi^5_{i,1} = \psi^5_{i,2} = \psi^5_{i,3} = \psi^5_{i,4}$$ ist,

$$\psi^5_i = 31(106\zeta^i + 66\zeta^{2i} + 201\zeta^{3i} + 36\zeta^{4i}), \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{10}$$

Berücksichtigen wir noch die sich aus den Gleichungen (9) ergebenden Bedingungen

$$(11)\quad \begin{cases} \psi_{1,k}\,.\,\psi_{4,k} = 31, \\ \psi^2_{1,k}\,.\,\psi_{3,k} = -31(6\zeta + 3\zeta^2 \qquad\quad + 2\zeta^4), \\ \psi^3_{1,k}\,.\,\psi_{2,k} = -31(3\zeta + 20\zeta^2 - 18\zeta^3 - 6\zeta^4), \end{cases}$$

so erhalten wir

$$(12)\quad \begin{aligned} 5w_i &= -1 + \psi_{1,i} + \psi_{2,i} + \psi_{3,i} + \psi_{4,i} \\ &= -1 + \zeta^{-i}\psi_{1,i} + \zeta^{-2i}\psi_{2,i} + \zeta^{-3i}\psi_{3i} + \zeta^{-4i}\psi_{4,i}. \end{aligned}$$

Das Produkt von u_0, v_0, w_0 ist

$$\begin{aligned} (13)\quad u_0v_0w_0 = &-\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 4\varepsilon_3 \quad - 2\varepsilon_5 \quad + \varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \varepsilon_9 \\ &- 2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} - 5\varepsilon_{13} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{15} - \varepsilon_{16} - 2\varepsilon_{17} + 4\varepsilon_{18} + 2\varepsilon_{19} \\ &+ 2\varepsilon_{20} + \varepsilon_{21} - \varepsilon_{22} + 9\varepsilon_{23} - 2\varepsilon_{24} + \varepsilon_{25} + 3\varepsilon_{26} + 2\varepsilon_{27} + 4\varepsilon_{28} - 2\varepsilon_{29}. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung und den 29 übrigen, die aus ihr durch cyklische Vertauschung hervorgehen, folgt

$$\begin{aligned} 31\varepsilon_0 = {} & 8u_0v_0w_0 + 5u_0v_1w_0 + 6u_0v_2w_0 \quad + 6u_1v_0w_0 + 3u_1v_1w_0 + 3u_1v_2w_0 \\ & + 2u_0v_0w_1 - u_0v_1w_1 + u_0v_2w_1 \quad + u_1v_0w_1 - 2u_1v_1w_1 - u_1v_2w_1 \\ (14)\quad & + 3u_0v_0w_2 \quad + \quad + u_1v_0w_2 - u_1v_1w_2 - 3u_1v_2w_2 \\ & + 3u_0v_0w_3 - u_0v_1w_3 \quad + 2u_1v_0w_3 - 2u_1v_1w_3 - 2u_1v_2w_3 \\ & + 4u_0v_0w_4 + u_0v_1w_4 \quad + u_1v_0w_4 - 2u_1v_1w_4 - 4u_1v_2w_4 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 31\varepsilon_0 = {} & 8u_0v_0w_0 + 5u_0v_1w_0 + 6u_0v_2w_0 \\ & + 2u_0v_0w_1 - u_0v_1w_1 + u_0v_2w_1 \\ & + 3u_0v_0w_2 \\ & + 3u_0v_0w_3 - u_0v_1w_3 \\ & + 4u_0v_0w_4 + u_0v_1w_4 \\ & + 6u_1v_0w_0 + 3u_1v_1w_0 + 3u_1v_2w_0 \\ & + u_1v_0w_1 - 2u_1v_1w_1 - u_1v_2w_1 \\ & + u_1v_0w_2 - u_1v_1w_2 - 3u_1v_2w_2 \\ & + 2u_1v_0w_3 - 2u_1v_1w_3 - 2u_1v_2w_3 \\ & + u_0v_0w_4 - 2u_1v_1w_4 - 4u_1v_2w_4. \end{aligned}$$

Bei der Ausführung grösserer Multiplikationen wurde die Rechenmaschine des physikalischen Instituts benutzt, die Herr Professor Richarz so liebenswürdig war, mir zur Verfügung zu stellen.

p = 23.

Die primitiven 23ten Einheitswurzeln sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_{0}^{22} {}_i\, x^i = 0.$$

Eine primitive 23te Kongruenzwurzel ist 5, so dass

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numerus	1	5	2	10	4	−3	8	−6	−7	11	9
Index	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Numerus	−1	−5	−2	−10	−4	3	−8	6	7	−11	−9

eine Indextabelle ist.

Die Zahl $p-1=22$ ist in die beiden Primfaktoren 2 und 11 zerlegbar. Wir haben daher die beiden elfgliedrigen Perioden u_0 und u_1 und die elf zweigliedrigen Perioden v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 v_7, v_8, v_9, v_{10} zu bilden.

Die beiden elfgliedrigen Perioden sind

$$u_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{2+i} + \varepsilon_{4+i} + \varepsilon_{6+i} + \varepsilon_{8+i} + \varepsilon_{10+i} + \varepsilon_{12+i} + \varepsilon_{14+i} + \varepsilon_{16+i} + \varepsilon_{18+i} + \varepsilon_{20+i}, \qquad (i = 0,\ 1).$$

Da nun

$$u_0 + u_1 = -1 \qquad u_0 \cdot u_1 = 6$$

ist, so sind u_0 und u_1 die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + u + 6 = 0.$$

Es folgt demnach

$$2u_0 = -1 + \sqrt{-23},$$
$$2u_1 = -1 - \sqrt{-23}.$$

Die elf zweigliedrigen Perioden sind

$$v_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{11+i} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10).$$

Wir setzen jetzt, indem wir unter ζ eine primative elfte Einheitswurzel verstehen:

$$\chi_{i,k} = \zeta^{-i.k}(v_0 + \zeta^i v_1 + \zeta^{2i} v_2 + \zeta^{3i} v_3 + \zeta^{4i} v_4 + \zeta^{5i} v_5 + \zeta^{6i} v_6 + \zeta^{7i} v_7 + \zeta^{8i} v_8 + \zeta^{9i} v_9 + \zeta^{10i} v_{10}),$$

$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10;\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10).$

Die Berechnung von $x^{11}{}_{1;0}$ ist wegen der damit verbundenen ausserordentlich grossen Mühe nicht durchgeführt worden.

Nehmen wir $x^{11}{}_{1;0}$ und damit auch sämtliche $x^{11}{}_{i,k}$ als bekannt an, so ergiebt sich

$$11u_i = -1 + \sum_1^{10}{}_k \varkappa_{k,i},$$

$$= -1 + \sum_1^{10}{}_k \zeta^{-k.i} \chi_{k,0},$$

($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$; $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$).

Bilden wir nun das Produkt von u_0 und v_0, so folgt

$$u_0 \cdot v_0 = +\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad -\varepsilon_5 \quad +\varepsilon_7 - \varepsilon_8$$
$$-\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13} \quad +\varepsilon_{16} \quad +\varepsilon_{18} + \varepsilon_{19}.$$

Aus dieser Gleichung und den 21 übrigen, die sich aus ihr durch cyklische Vertauschung ergeben, erhalten wir:

$$23\varepsilon_0 = -12u_0v_0 - 2u_0v_1 \quad -u_0v_3 - u_0v_4 \quad -u_0v_6 - 2u_0v_7 - 2u_0v_8 - u_0v_9 - u_0v_{10}$$
$$-11u_1v_0 + 2u_1v_1 \quad +u_1v_3 + u_1v_4 \quad +u_1v_6 + 2u_1v_7 + 2u_1v_8 + u_1v_9 + u_1v_{10}$$

Lebenslauf.

Der Verfasser vorliegender Arbeit, Paul Wilhelm Herrmann Heidke, evangelischer Konfession, wurde am 3. November 1877 zu Gollnow als der Sohn des Uhrmachers Wilhelm Heidke geboren. Er besuchte von Ostern 1884 bis 1891 die gehobene Bürgerschule zu Rügenwalde, von Ostern 1891 bis 1896 das Schiller-Realgymnasium zu Stettin, wo er den mathematischen und physikalischen Unterricht hauptsächlich von Herrn Professor Dr. Krankenhagen erhielt. Seit Ostern 1896 widmete er sich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften auf der Universität Greifswald. Während dieser Zeit besuchte er die Übungen und Vorlesungen folgender Herren Professoren und Dozenten:

Brendel, Credner, Holtz, Limpricht, Minnigerode †, Rehmke, Richarz, Schreber, Schuppe, Schwanert, Study, Thomé.

Allen seinen verehrten Lehrern spricht der Verfasser auch an dieser Stelle seinen ehrerbietigsten Dank aus, namentlich Herrn Professor Study sowohl für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit, als auch für die freundliche Unterstützung bei derselben.

Thesen.

I.

Mit Hilfe der Gruppentheorie ist die Lösung der Gleichungen 3. und 4. Grades auf ein einheitliches Schema zurückzuführen.

II.

Es ist nach dem Stande der jetzigen Kenntnisse als höchst wahrscheinlich anzunehmen, dass in der Nähe des Nordpoles kein Kältepol sich befindet.

III.

Es empfiehlt sich die Einteilung des rechten Winkels nach dem Dezimalsystem.